Contrôle continu (2h)
Mathématiques financières

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre mais numérotez bien chaque question. Les points dépendent aussi (et surtout) de la manière dont vous arrivez aux résultats (raisonnement, formules utilisées) et non uniquement des nombres obtenus à la fin. Les résultats numériques doivent être présentés avec 2 décimales au moins tandis que les calculs intermédiaires doivent être effectués en gardant 4 décimales au moins.

Exercice 1

Vous considérez investir dans un portefeuille constitué de 3 actifs. Vous disposez des informations suivantes :

	Composition	Rentabilité attendue	Matrice variances–covariances			
				A	B	C
A	20 %		A	0,64 %	0,39 %	0,56 %
B	35 %	12 %	B	0,39 %	2,56 %	1,03 %
C	45 %	9 %	C	0,56 %	1,03 %	1,96 %

1) Calculer la rentabilité attendue de A si celle du portefeuille est de 9,25 %.

2) Calculer les corrélations de ces actifs.

3) Calculer la covariance de chacun des titres avec le portefeuille (en pourcentage).

4) Calculer la variance et l'écart-type du portefeuille.

5) Déterminer le bêta de chacun des titres du portefeuille. Interpréter.

Exercice 2

1) En vous basant sur le formulaire, donner les caractéristiques d'un portefeuille composé de deux actifs A et B dans une proportion w_A, w_B.

Dans le reste de l'exercice, les deux actifs sont parfaitement corrélés positivement.

2) Dans ce cas, déduire de la question précédente l'expression du risque du portefeuille [1].

3) En utilisant le fait que $w_A = 1 - w_B$, établir alors la relation entre la rentabilité attendue du portefeuille $E(r_P)$ et son risque σ_P.

Soient les actifs avec les caractéristiques suivantes :

	Rentabilité attendue (%)	Volatilité (%)
Actif A	7	10
Actif B	9	15

4) Étant données ces caractéristiques, donner cette relation entre rentabilité attendue du portefeuille et son risque. En déduire le taux d'intérêt sans risque.

5) Établir justement la composition w_A, w_B qui annule le risque du portefeuille.

6) Expliciter le portefeuille sans risque obtenu à partir des actifs A et B si le montant à investir est de 200 000 € .

1. Utiliser l'identité remarquable $a^2 + b^2 + 2\,ab = (a + b)^2$.

Exercice 3

Le promoteur immobilier Kartman anticipe un fort développement du tourisme dans le pays Bigouden. Il dispose de 1 800 000 € pour acheter des propriétés qu'il revendra dans cinq ans. Voici la sélection de biens qui l'intéresse, accompagnée de diverses estimations :

Projet	Prix aujourd'hui	Taux d'actualisation	Prix de vente espéré dans cinq ans
La Villa de l'Océan	300 000 €	15 %	1 800 000 €
Le Manoir de la Torche	1 500 000 €	15 %	7 550 000 €
L'Hôtel du Far	900 000 €	15 %	5 000 000 €
La Crêperie du Port	600 000 €	8 %	3 550 000 €
Le Penty	300 000 €	8 %	1 000 000 €
La Résidence Chouchen	900 000 €	8 %	4 650 000 €

1) Établir la formule qui donne le TRI en fonction du prix de vente et du coût d'une propriété. Quel est alors le TRI de chaque opportunité d'investissement ?

2) En notant r le taux d'actualisation, établir la formule qui donne la VAN d'un projet. Quelle est alors la VAN de chaque projet de la sélection ?

3) Quelles propriétés le promoteur doit-il acquérir ?

4) Qu'en est-il si le promoteur ne dispose que de 1 200 000 € ?

5) Quelle propriété doit-il privilégier s'il ne peut traiter qu'une affaire ?

Formulaire

— L'efficience d'une ressource se mesure par $\dfrac{\text{Valeur créée}}{\text{Ressource consommée}}$.

Ainsi l'indice de profitabilité est donné par $\text{IP} = \dfrac{\text{VA}}{C_0} = \dfrac{\text{VA}}{I} = \dfrac{\text{VAN}+I}{I}$.

— La rentabilité attendue du titre i est donnée par l'espérance $E(r_i) = \overline{r_i} = \mu_i$. La variance de la rentabilité d'un titre i est notée $\text{Var}(r_i) = \sigma_i^2$.

— La covariance entre les rentabilités des titres indexés par i et j est définie par $\text{Cov}(r_i, r_j) = \sigma_{ij} = E\left(r_i r_j\right) - \mu_i \mu_j$ et notée σ_{ij} tandis que leur corrélation est donnée par $\rho_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$.

— Soit un portefeuille P constitué de N actifs. Le poids investi dans l'actif i est en proportion w_i. La rentabilité attendue du portefeuille est

$$E(r_P) = \overline{r_p} = \sum_{i=1}^{N} w_i \, E(r_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \overline{r_i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

et sa variance est donnée par

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \sigma_{iP} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \, \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_i w_j \, \sigma_{ij}.$$

— Le bêta d'un actif i au sein d'un portefeuille M est donné par $\beta_i = \dfrac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\text{Var}(r_M)} = \dfrac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$.